

Nombres complexes

Nombres complexes.....	1
1. Révisions	2
2. Lecture graphique	4
3. Formule de Moivre	6
4. Calculer un produit, un quotient, une puissance FACILEMENT grâce à la forme exponentielle ...	8
5. Factorisation – TC1 5 ième	9
6. Ensembles de points	10
7. Tests Communs de 4 ^e	11

1. Révisions

Quelques formules importantes qui ne sont pas sur le formulaire:

$$\text{l'afixe du vecteur } \overrightarrow{AB} = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

$$z_{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}} = \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{la distance } AB = |z_{\overrightarrow{AB}}|.$$

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points A_i d'affixes z_i données ci-dessous.

Écrire chacun des nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique.

Ensuite, placer dans le plan les points A_i quand c'est possible.

1) $z_1 = (1 - i) + (2 + 3i)$

2) $z_2 = (1 - i)(2 + 3i)$

3) $z_3 = \frac{(1-i)}{(2+3i)}$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit les points A_i d'affixes z_i données ci-dessous.

Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, calculer son module, un de ses arguments et une de ses formes trigonométriques.

Ensuite, placer dans le plan les points A_i .

1) $z_1 = -4 + 4i$

2) $z_2 = 5i$

3) $z_3 = -6$

4) $z_4 = 0$

5) $z_5 = -\sqrt{3} - 3i$

6) $z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $z_7 = 1 + i$

Exercice 3

39 a. $iz + 2(z - i) = 0$; b. $(4 + i)z = 3 - z$.

40 a. $(z + 2i)(2z - 3 + i) = 0$.

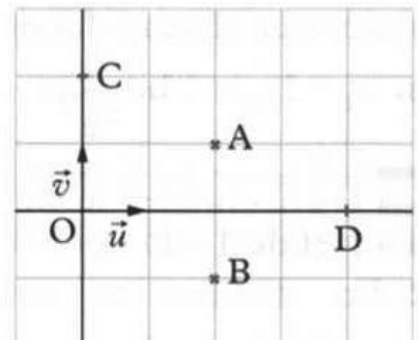
57. Le complexe u , est-il une solution de l'équation (E) ?

a) $u = -1 + 2i$, $(E) \Leftrightarrow (2 - i)z = 5i$;

b) $u = 4i$, $(E) \Leftrightarrow (1 - i)z = 3i$;

Exercice 4

Lire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{DO}$.



Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = -2 + i$ et $z_B = 3i$.

Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2 - i$ et $z_D = -1 - 2i$.

- Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Calculer la distance AB .
- Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
- Calculer la distance CD .
- Donner l'affixe du vecteur $-3\overrightarrow{AB}$.
- Donner l'affixe du vecteur $-3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}$.
- Calculer l'affixe du point E sachant que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{DC}$.
- Placer les points A, C, D dans le plan.
Calculer l'affixe du point H pour que $ACDH$ soit un parallélogramme.
Placer le point H dans le plan.
- Soit le point I d'affixe $-2 - 3i$. Placer le point I dans le plan. Prouvez que le triangle ACI est isocèle en C .

Exercice 6

Calculer $\bar{z}$, le complexe conjugué de z .

Que valent la partie réelle et la partie imaginaire de $\bar{z}$.

Est-ce que $\bar{z}$ est un réel?

Est-ce que $\bar{z}$ est un imaginaire pur?

- $z = (3 + 5i) + (4 - 2i)$
- $z = (3 + 5i) + (-4 - 5i)$
- $z = (3 + 5i) - (3 - 5i)$
- $z = (-3 + 5i) - (-3 + 5i)$

Solution des exercices 1 à 6:

Exercice 1

$$1) 3+2i \quad 2) 5+i \quad 3) -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i.$$

Exercice 2

$$1) 4\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right); \quad 2) 5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right); \quad 3) 6(\cos(\pi) + i \sin(\pi)); \quad 4) \text{le module } |z_4| \text{ vaut } 0, z_4 \text{ n'a pas d'argument, } z_4 \text{ n'a pas de forme trigonométrique};$$
$$5) 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) \right); \quad 6) 1 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \right); \quad 7) \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Exercice 3

$$39) a) \left\{ \frac{2}{5} + \frac{4i}{5} \right\} \quad b) \left\{ \frac{15}{26} - \frac{3i}{26} \right\} \quad 40) a) \left\{ -2i; \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \right\}.$$
$$57) a) \text{Oui} \quad b) \text{Non.}$$

Exercice 4

$$a) z_{\overline{AB}} = -2i, z_{\overline{AC}} = -2 + i, z_{\overline{CB}} = 2 - 3i, z_{\overline{OC}} = 2i, z_{\overline{AA}} = 0, z_{\overline{DO}} = -4.$$

Exercice 5

$$a) z_{\overline{AB}} = 2 + 2i \quad b) AB = 2\sqrt{2} \quad c) z_{\overline{CD}} = -3 - i \quad d) CD = \sqrt{10} \quad e) -6 - 6i \quad f) -4i \quad g) z_E = -7 + 2i \quad h) z_H = -5 \quad i) AC = 2\sqrt{5} = IC.$$

Exercice 6

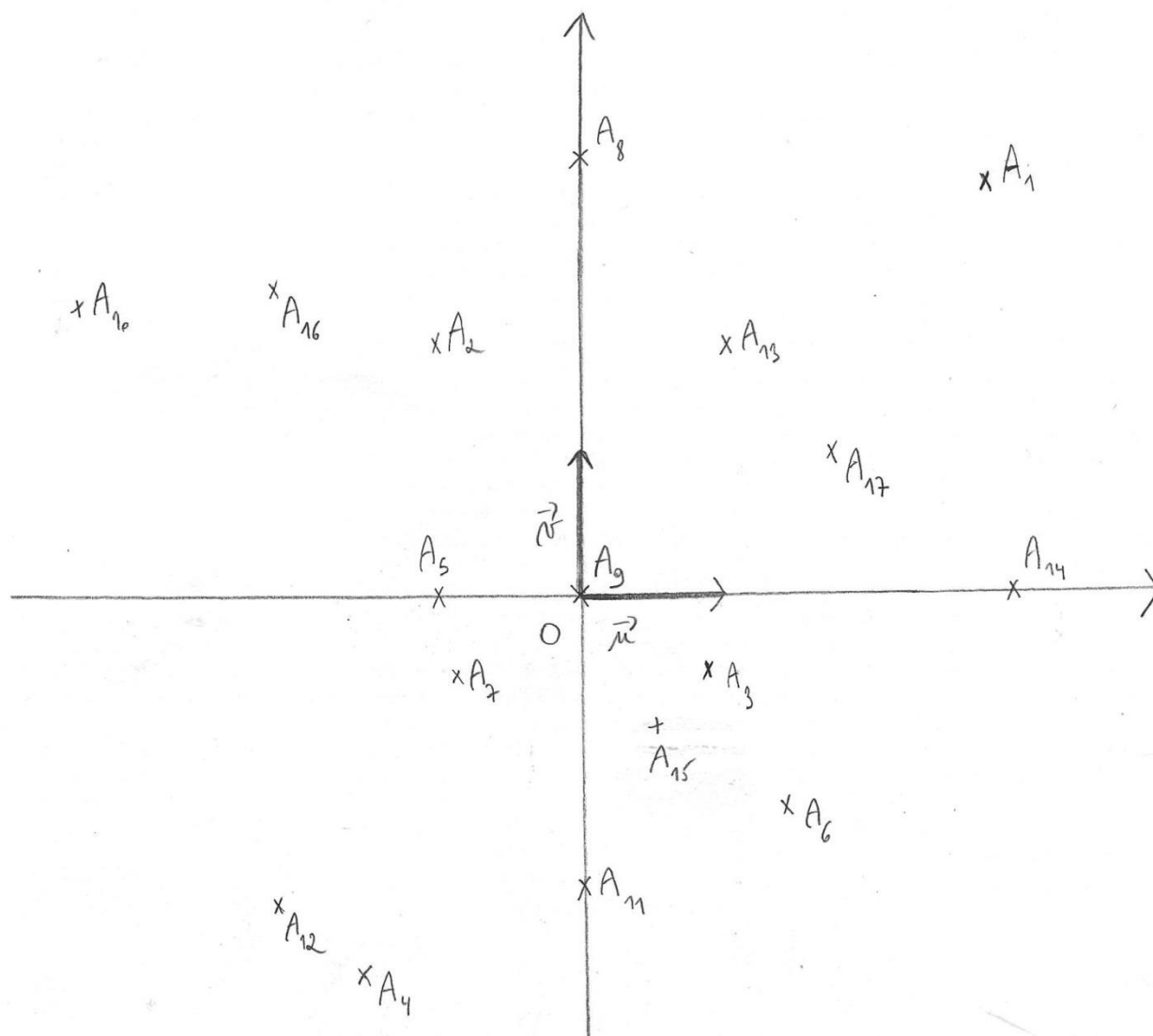
- $\bar{z} = 7 - 3i, \operatorname{Re}(\bar{z}) = 7, \operatorname{Im}(\bar{z}) = -3, \bar{z}$ n'est pas un réel, $\bar{z}$ n'est pas un imaginaire pur;
- $\bar{z} = -1, \operatorname{Re}(\bar{z}) = -1, \operatorname{Im}(\bar{z}) = 0, \bar{z}$ est un réel, $\bar{z}$ n'est pas un imaginaire pur;
- $\bar{z} = -10i, \operatorname{Re}(\bar{z}) = 0, \operatorname{Im}(\bar{z}) = -10, \bar{z}$ n'est pas un réel, $\bar{z}$ est un imaginaire pur;
- $\bar{z} = 0, \operatorname{Re}(\bar{z}) = 0, \operatorname{Im}(\bar{z}) = 0, \bar{z}$ est un réel, $\bar{z}$ est un imaginaire pur.

2. Lecture graphique

Exercice 7

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unités graphiques $a \text{ cm}$ (remarque : a dépend de l'impression de ce fichier).

L'affixe du point A_i est le complexe z_i .



Remplir le tableau suivant par lecture graphique, SANS CALCUL.

Affixe	Module en unités de longueur (arrondi à l'unité)	Argument principal (arrondi à une valeur remarquable)	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
z_1				
z_2				

z_3				
z_4				
z_5				
z_6				
z_7				
z_8				
z_9				
z_{10}				
z_{11}				
z_{12}				
z_{13}				
z_{14}				
z_{15}				
z_{16}				
z_{17}				

Solution de l'exercice 7

z_1	4	$\frac{\pi}{4}$	$4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$	$4 e^{i \frac{\pi}{4}}$
z_2	2	$\frac{2\pi}{3}$	$2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$	$2 e^{i \frac{2\pi}{3}}$
z_3	1	$\frac{-\pi}{6}$	$1 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right)$	$1 e^{i \frac{-\pi}{6}}$

$z_4 = 3 e^{i \frac{-2\pi}{3}}$; $z_5 = 1 e^{i \pi}$; $z_6 = 2 e^{i \frac{-\pi}{4}}$; $z_7 = 1 e^{i \frac{-5\pi}{6}}$; $z_8 = 3 e^{i \frac{\pi}{2}}$; $|z_9| = 0$, z_9 n'a ni argument principal, ni forme trigonométrique, ni forme exponentielle; $z_{10} = 4 e^{i \frac{5\pi}{6}}$; $z_{11} = 2 e^{i \frac{-\pi}{2}}$; $z_{12} = 3 e^{i \frac{-3\pi}{4}}$; $z_{13} = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}$; $z_{14} = 3 e^{i 0}$; $z_{15} = 1 e^{i \frac{-\pi}{3}}$; $z_{16} = 3 e^{i \frac{3\pi}{4}}$; $z_{17} = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$.

3. Formule de Moivre

Soient z et z' deux complexes.

Propriété

$$|z z'| = |z| |z'|$$

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors :

si on additionne un argument de z avec un argument de z' , on obtient un argument de $z z'$.

Preuve

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} [r(\cos \theta + i \sin \theta)][r'(\cos \theta' + i \sin \theta')] &= r r' (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= r r' (\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + i^2 \sin \theta \sin \theta') \\ &= r r' (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')) \\ &= r r' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors :

$$\begin{aligned} |z z'| &= |0| = 0 \\ |z| &= 0 \text{ ou } |z'| = 0 \\ |z| |z'| &= 0 \\ |z z'| &= |z| |z'| \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Propriété

Si $z' \neq 0$ alors :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors :

si à un argument de z on soustrait un argument de z' , on obtient un argument de $\frac{z}{z'}$.

Preuve

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{r'(\cos \theta' + i \sin \theta')} &= \frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{r'(\cos \theta' + i \sin \theta')} \times \frac{(\cos \theta' - i \sin \theta')}{(\cos \theta' - i \sin \theta')} \\ &= \frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos(-\theta') + i \sin(-\theta'))}{r'(\cos^2 \theta' - i^2 \sin^2 \theta')} \\ &= \frac{r(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))}{r'(\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta')} \\ &= \frac{r}{r'} (\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')) \end{aligned}$$

Si $z = 0$ et $z' = 0$ alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z'} \right| &= |0| = 0 \\ |z| &= 0 \\ \frac{|z|}{|z'|} &= 0 \\ \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Propriété

Soient θ et θ' deux réels.

En définissant $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ on obtient :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \\ &= e^{i(\theta + \theta')} \\ &= e^{i\theta + i\theta'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{i\theta}} &= \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(0 - \theta) + i \sin(0 - \theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} e^{i(-\theta')} = e^{i\theta - i\theta'}$$

$\forall n \in \mathbb{N}: (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (c'est la formule de Moivre)

En effet : Initialisation ($n = 0$) :

$$(e^{i\theta})^0 = 1 \text{ (par définition)}$$

$$e^{i0\theta} = e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$(e^{i\theta})^0 = e^{i0\theta}$$

On a donc l'initialisation.

Hérédité :

Supposons que pour un n fixé $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

$$(e^{i\theta})^{n+1} = (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta} e^{i\theta} = e^{in\theta + i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$$

On a donc l'hérédité.

On a donc la formule de Moivre.

4. Calculer un produit, un quotient, une puissance FACILEMENT grâce à la forme exponentielle

Exercice 8

Remplir le tableau suivant.

	z_1	z_2		La forme exponentielle PRINCIPALE (l'argument $\in]-\pi; \pi]$) de
a)	$4 e^{i \frac{\pi}{4}}$	$3 e^{i \frac{5\pi}{6}}$	$z_1 \cdot z_2 =$	$z_1 \cdot z_2 =$
b)	$4 e^{i \frac{\pi}{4}}$	$3 e^{i \frac{5\pi}{6}}$	$\frac{z_1}{z_2} =$	$\frac{z_1}{z_2} =$
c)	$2 e^{i \frac{-\pi}{3}}$		$(z_1)^{10} =$	$(z_1)^{10} =$
d)	$1 e^{i \frac{\pi}{2}}$	$4 e^{i \left(\frac{-2\pi}{3}\right)}$	$z_1 \cdot z_2 =$	$z_1 \cdot z_2 =$
e)	$1 e^{i \frac{\pi}{2}}$	$4 e^{i \left(\frac{-2\pi}{3}\right)}$	$\frac{z_1}{z_2} =$	$\frac{z_1}{z_2} =$
f)	$2 e^{i \frac{\pi}{3}}$		$(z_1)^5 =$	$(z_1)^5 =$
g)	$3 e^{i \frac{-\pi}{2}}$	$2 e^{i \frac{\pi}{2}}$	$z_1 \cdot z_2 =$	$z_1 \cdot z_2 =$
h)	$3 e^{i \frac{-\pi}{2}}$	$2 e^{i \frac{\pi}{2}}$	$\frac{z_1}{z_2} =$	$\frac{z_1}{z_2} =$
i)	$e^{i \frac{-\pi}{2}}$		$(z_1)^{30} =$	$(z_1)^{30} =$

Solution de l'exercice 8

a)			$z_1 \cdot z_2 = 12 e^{i \frac{13\pi}{12}}$	$z_1 \cdot z_2 = 12 e^{i \frac{-11\pi}{12}}$
b)			$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{3} e^{i \frac{-7\pi}{12}}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{3} e^{i \frac{-7\pi}{12}}$

c) $(z_1)^{10} = 1024 e^{i \frac{-10\pi}{3}} = 1024 e^{i \frac{2\pi}{3}}$ d) $z_1 \cdot z_2 = 4 e^{i \frac{-\pi}{6}}$ e) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} e^{i \frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{4} e^{i \frac{-5\pi}{6}}$ f) $(z_1)^5 = 32 e^{i \frac{5\pi}{3}} = 32 e^{i \frac{-\pi}{3}}$ g) $z_1 \cdot z_2 = 6 e^{i 0}$ h) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} e^{i(-\pi)} = \frac{3}{2} e^{i\pi}$ i) $(z_1)^{30} = e^{i(-15\pi)} = e^{i\pi}$.

5. Factorisation – TC1 5 ième

Exercice 9 : TC1 5 ième 2019

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $z^3 - 27 = 0$

- 1) Montrer que le nombre complexe $z_1 = 3$ est une solution de (E) .
- 2) Démontrer que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z - 3)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.
- 3) Résoudre l'équation (E) .

Exercice 10 : TC1 5 ième 2018

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - z^2 - 2z - 12$$

- 1) Montrer que le nombre complexe $z_0 = 3$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
- 2) a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$.
b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11 : TC1 5 ième 2017

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

- 1) Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$.

Qu'est-ce qu'on peut en déduire ?

- 2) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 + az + b)$.
- 3) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 12 : TC1 5 ième 2016

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 6z^2 + 16z - 16$.

- a) Déterminer les réels b et c tels que pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait

$$z^3 - 6z^2 + 16z - 16 = (z - 2)(z^2 + bz + c).$$

- b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 6z^2 + 16z - 16 = 0$.

Solution des exercices 9 à 12

Exercice 9 : 1) $(3)^3 - 27 = 0$ 2) $a = 1, b = 3, c = 9$ 3) $S = \left\{3; \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i; \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Exercice 10 : 1) $P(3) = 0$ 2) a) $a = 1, b = 2, c = 4$ b) $S = \{3; -1 + \sqrt{3}i; -1 - \sqrt{3}i\}$

Exercice 11 : 1) $P(i\sqrt{3}) = 0$, $i\sqrt{3}$ est racine de P , $P(-i\sqrt{3}) = 0$, $-i\sqrt{3}$ est racine de P
2) $a = -6, b = 21$, 3) $S = \{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}i, 3 - 2\sqrt{3}i\}$

Exercice 12 : a) $b = -4, c = 8$ 3) $S = \{2; 2 + 2i; 2 - 2i\}$

6. Ensembles de points

Exercice à faire avec le professeur.

Exercice 13

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

- a) $|z| = 1$;
- b) $|z - 2 - i| = 2$;
- c) $|z - 3| = |z - 1 - i|$.

Représenter ces ensembles de points dans le plan.

Exercice à faire seul.

Exercice 14

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que:

- a) $|z| = 3$;
- b) $|z - 3 + 2i| = 4$;
- c) $|z + 2 - i| = |z + 3i|$.

Représenter ces ensembles de points dans le plan.

Solutions

- Ex.13: a) L'ensemble des points est le cercle de centre O et de rayon 1.
b) L'ensemble des points est le cercle de centre $I(2; 1)$ et de rayon 2.
c) L'ensemble des points est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(3; 0)$ et $B(1; 1)$.

- Ex.14: a) L'ensemble des points est le cercle de centre O et de rayon 3.
b) L'ensemble des points est le cercle de centre $I(3; -2)$ et de rayon 4.
c) L'ensemble des points est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(-2; 1)$ et $B(0; -3)$.

7. Tests Communs de 4^e

Exercice 15: 2014

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit le polynôme $(z) = z^3 - z^2 - 3z + 27$.

- 1) Montrer que $(z) = (z + 3)(z^2 - 4z + 9)$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = -2\sqrt{3} - 2i, b = -4i \text{ et } c = 2\sqrt{3} + 2i.$$

- 1 a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres a, b, c .
b) En déduire la forme trigonométrique et la forme algébrique de a^3 .
c) En utilisant les formes algébriques de b et c , calculer $\frac{b}{c}$.
d) En utilisant les formes trigonométriques de a et c , calculer $a \cdot c$.
- 2 a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
b) Déduire de 1a) que les points A, B et C appartiennent à un même cercle (C). Déterminer, en justifiant, son centre et son rayon.
c) En déduire que le triangle ABC est rectangle.
d) Calculer l'affixe du point D tel que ABCD soit un rectangle.
e) Tracer le cercle (C), le point D ainsi que le rectangle ABCD.

Exercice 16: 2013

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système
$$\begin{cases} u + v = i(\sqrt{3} + 1) \\ u - v = 2 + i(1 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

2°) Soit $u = 1 + i$ et $v = -1 + i\sqrt{3}$.

- a) Ecrire u et v sous forme trigonométrique.
 - b) En déduire la forme trigonométrique et la forme géométrique de u^3 .
- 3°)
- a) En utilisant les formes trigonométriques de u et v , donner la forme trigonométrique de $\frac{u}{v}$.
 - b) En utilisant les formes algébriques de u et v , donner la forme algébrique de $\frac{u}{v}$.
 - c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 17: 2012

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.

- 1) Montrer que $P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Placer dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives :
 $z_A = 2$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = 1 - i$
- 4) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_A , z_B , z_C .
- 5) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.
- 6) En déduire l'affixe du centre Ω et le rayon du cercle (C) passant par les points A , B et C .

Partie B

Soit le nombre complexe $z = 2 + i\sqrt{12}$.

- 1) Ecrire z sous forme trigonométrique.
- 2) Donner la forme algébrique de z^5 .

Exercice 18: 2011

Pour tout nombre complexe z on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1. Montrer que $z_0 = 2$ est une racine de P .
2. En déduire que $P(z) = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ en appelant z_1 et z_2 les solutions non réelles de cette équation, z_1 ayant la partie imaginaire positive.
4. a) Placer, dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm, les points A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2 .
b) Vérifier que A , B et C sont placés sur le même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
5. Déterminer la forme trigonométrique de z_0 , z_1 et z_2 , puis calculer z_1^{10} .

Exercice 19: 2008

Soit P le polynôme défini par: $P(z) = z^2 + 2z + 4$

1. Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

On appelle z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution.

Quelle est la relation entre z_1 , z_2 et le terme constant de $P(z)$?

2. Mettre z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

3. Soit $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$

Donner la forme trigonométrique de z_3 .

4. Soit $z_4 = (-1 + \sqrt{3}i) \cdot z_3$

Faire le calcul en utilisant les formes trigonométriques d'une part et puis les formes algébriques d'autre part. Donner z_4 sous la forme trigonométrique et sous la forme algébrique.

5. Soit $z_5 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{z_3}$.

Faire le calcul en utilisant les formes trigonométriques d'une part et puis les formes algébriques d'autre part. Donner z_5 sous la forme trigonométrique et sous la forme algébrique.

6. Calculer $(z_4)^5$. La forme trigonométrique sera suffisante.

Montrer que $(z_4)^5 \cdot (z_5)^5 = 4^5$.

Exercice 20: 2007

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 + 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.

On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution.

2. Soit le nombre $z_3 = -2 + 2i$.

- a) Écrire chacun des nombres z_1 , z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.
- b) Construire avec précision les points A_1 , A_2 et A_3 d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 dans le plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

3. On considère le nombre $Z = \frac{z_3^4}{z_2^4}$.

- a) Calculer le module et un argument de Z .
- b) Écrire Z sous forme algébrique.

Solution des exercices 15 à 20

Exercice 15. Partie A. 2) $S = \{-3; 2 - \sqrt{5}i; 2 + \sqrt{5}i\}$. Partie B. 1a) $|a| = 4$, $\text{ArgumentPrincipal}(a) = \frac{-5\pi}{6}$, $|b| = 4$, $\text{ArgumentPrincipal}(b) = \frac{\pi}{2}$, $|c| = 4$, $\text{ArgumentPrincipal}(c) = \frac{\pi}{6}$; 1b) $a^3 = -64i$; 1c) $\frac{b}{c} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 1d) $a \cdot c = 16 \left(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3} \right)$. 2b) $OA = OB = OC = 4$ d'où A, B et C appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 4 ; 2c) $[AC]$ est un diamètre du cercle $(\mathcal{C})$ (car $\frac{a+c}{2} = 0$) et la question 2b impliquent que le triangle ABC est rectangle (en B); 2d) $d = 4i$.

Exercice 16. 1) $u = 1 + i$, $v = -1 + \sqrt{3}i$; 2a) $u = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $v = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$; 2b) $u^3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; 3a) $\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{-5\pi}{12} + i \sin \frac{-5\pi}{12} \right)$; 3b) $\frac{u}{v} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} - \frac{1+\sqrt{3}}{4}i$; 3c) $\cos \frac{-5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{-5\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 17. Partie A. 2) $S = \{2; 1 - i; 1 + i\}$; 4) $|z_A| = 2$, $\text{ArgumentPrincipal}(z_A) = 0$, $|z_B| = \sqrt{2}$, $\text{ArgumentPrincipal}(z_B) = \frac{\pi}{4}$, $|z_C| = \sqrt{2}$, $\text{ArgumentPrincipal}(z_C) = \frac{-\pi}{4}$; 5) isocèle: $AB = AC = \sqrt{2}$, rectangle (en A): $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$; 6) $z_\Omega = \frac{z_B + z_C}{2} = 1$ (car Ω est le centre du segment $[BC]$), rayon = 1. Partie B.

1) $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ 2) $z^5 = 512 - i 512\sqrt{3}$.

Exercice 18. 1) $P(z_0) = 0$; 3) $z_0 = 2$, $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$; 4b) $OA = OB = OC = 2 = \text{rayon}$; 5) $z_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$, $z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$, $z_2 = 2 \left(\cos \frac{-3\pi}{4} + i \sin \frac{-3\pi}{4} \right)$, $z_1^{10} = -1024i$.

Exercice 19. 1) $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$; 2) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$, $z_2 = 2 \left(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3} \right)$; 3) $z_3 = 4 \left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} \right)$; 4) $z_4 = 8i = 8(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$; 5) $z_5 = \frac{-i}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right)$; 6) $(z_4)^5 = 32768i$.

Exercice 20. 1) $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$; 2a) $z_1 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$, $z_2 = 4 \left(\cos \frac{-5\pi}{6} + i \sin \frac{-5\pi}{6} \right)$, $z_3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; 3a) $|Z| = \frac{1}{4}$, $\text{ArgumentPrincipal}(Z) = \frac{\pi}{3}$; 3b) $Z = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$.